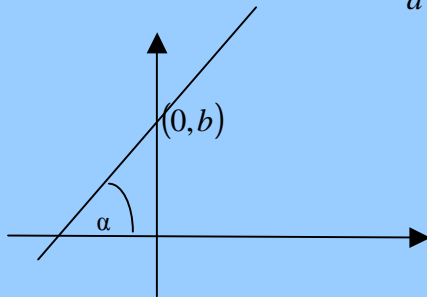


10. 1. RÓWNANIE PROSTEJ NA PŁASZCZYŹNIE

Równanie kierunkowe prostej: $y = ax + b$, gdzie $a, b \in R$

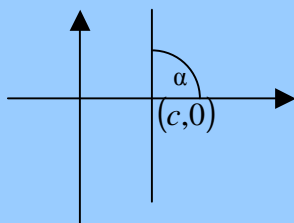
a – współczynnik kierunkowy, b – współczynnik stały



Prosta $y = ax + b$ przecina oś OY w punkcie $(0, b)$
i jest nachylona do osi OX pod kątem α

Prosta $y = ax + b$ w zależności od znaku współczynnika a

$a > 0$	$a < 0$	$a = 0$
<p>$\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$ $a = \operatorname{tg} \alpha$</p>	<p>$\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$ $a = -\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$</p>	<p>$\alpha = 0^\circ$</p>



Prosta nachylona do osi OX pod kątem $\alpha = 90^\circ$ nie ma równania kierunkowego.

Można ją zapisać za pomocą równania $x = c$.

Prosta ta przecina oś OX w punkcie $(c, 0)$

Przykład 10.1.1. Napisz równanie prostej l nachylonej do osi OX pod kątem $\alpha = 120^\circ$ i przechodzącej przez punkt $P = (\sqrt{3}, 1)$.

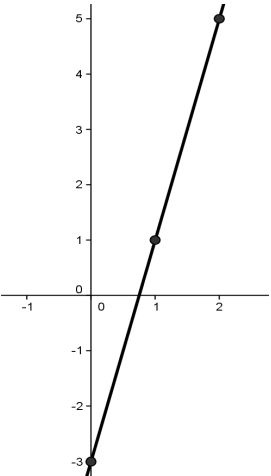
Rozwiązanie	Komentarz
$y = ax + b$	Aby wyznaczyć równanie prostej $y = ax + b$ musimy obliczyć a i b .
$a = -\operatorname{tg}(180^\circ - 120^\circ) = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}$ $y = -\sqrt{3}x + b$	Kąt $\alpha = 120^\circ$ kątem rozwartym $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$, dlatego a obliczymy ze wzoru $a = -\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$
$1 = -\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + b$ $1 = -3 + b$ $-b = -3 - 1$ $-b = -4 / : (-1)$ $b = 4$	Punkt $P = (\sqrt{3}, 1)$ należy do prostej, zatem jego współrzędne spełniają jej równanie. Do równania prostej $y = -\sqrt{3}x + b$ podstawiamy $x = \sqrt{3}; y = 1$
Odp. Prosta ma równanie : $y = -\sqrt{3}x + 4$	

Równanie ogólne prostej

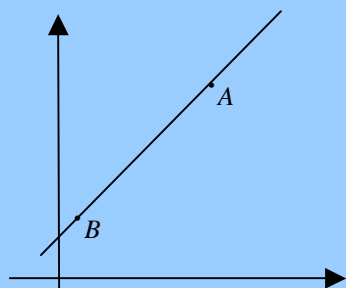
$$Ax + By + C = 0$$

, gdzie $A, B, C \in R$ i $A \neq 0 \vee B \neq 0$

Przykład 10.1.2. Narysuj prostą o równaniu $4x - y - 3 = 0$

Rozwiązanie	Komentarz								
$4x - y - 3 = 0$ $-y = -4x + 3 / : (-1)$ $y = 4x - 3$	Z równania $4x - y - 3 = 0$ wyznaczamy y i równanie ogólne prostej doprowadzamy do równania kierunkowego.								
<table border="1"> <tbody> <tr> <td>x</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>$y = 4x - 3$</td> <td>-3</td> <td>1</td> <td>5</td> </tr> </tbody> </table>	x	0	1	2	$y = 4x - 3$	-3	1	5	Przy pomocy tabelki wyznaczamy punkty należące do prostej .
x	0	1	2						
$y = 4x - 3$	-3	1	5						
	Zaznaczając punkty z tabelki rysujemy prostą.								

Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty



$$(y - y_A)(x_B - x_A) = (x - x_A)(y_B - y_A)$$

gdzie $A = (x_A, y_A)$; $B = (x_B, y_B)$

Jeśli $x_A = x_B$, to otrzymamy prostą o równaniu $x = c$ (prosta pionowa).

Jeśli $y_A = y_B$, to otrzymamy prostą o równaniu $y = b$ (prosta pozioma).

Przykład 10.1.3. Napisz równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty

$$A = (2,3); B = (-4,1)$$

Rozwiązanie	Komentarz
<p>I sposób:</p> $y = ax + b$ $A = (2,3) \qquad B = (-4,1)$ $3 = a \cdot 2 + b \qquad 1 = a \cdot (-4) + b$ $2a + b = 3 \qquad -4a + b = 1$	<p>Punkty $A = (2,3)$; $B = (-4,1)$ należą do prostej $y = ax + b$, zatem ich współrzędne spełniają równanie prostej.</p> <p>Wykonujemy podstawienia: $x = 2, y = 3$ oraz $x = -4, y = 1$</p>
$\begin{cases} 2a + b = 3 \cdot (-1) \\ -4a + b = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} -2a - b = -3 \\ -4a + b = 1 \end{cases} +$ <hr/> $-2a - b - 4a + b = -3 + 1$ $-6a = -2 / : (-6)$ $a = \frac{1}{3}$ $2a + b = 3$ $2 \cdot \frac{1}{3} + b = 3$ $b = 3 - \frac{2}{3}$ $b = 2\frac{1}{3}$ $y = \frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3}$	<p>Budujemy układ równań. Rozwiązując go obliczymy współczynniki a i b.</p> <p>Układ rozwiązujemy metodą przeciwnych współczynników</p>
	<p>Piszemy równanie kierunkowe prostej</p>

<p>II sposób:</p> $(y - y_A)(x_B - x_A) = (x - x_A)(y_B - y_A)$ $(y - 3)(-4 - 2) = (x - 2)(1 - 3)$ $(y - 3) \cdot (-6) = (x - 2) \cdot (-2)$ $-6y + 18 = -2x + 4$ $-6y = -2x + 4 - 18$ $-6y = -2x - 14 / : (-6)$ $y = \frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3}$	<p>Do wyznaczenia prostej przechodzącej przez punkty $A = (2,3); B = (-4,1)$ wykorzystujemy wzór</p> $(y - y_A)(x_B - x_A) = (x - x_A)(y_B - y_A) \cdot$ <p>Wykonujemy podstawienie $x_A = 2, y_A = 3, x_B = -4, y_B = 1$</p> <p>Zapisujemy równanie kierunkowe prostej.</p>
---	---

Przykład 10.1.4. Punkty $(4,-4); (2,3); (p,0)$ są współliniowe. Wyznacz p .

Rozwiązanie	Komentarz
$(y - y_A)(x_B - x_A) = (x - x_A)(y_B - y_A)$ $(y + 4)(2 - 4) = (x - 4)(3 + 4)$ $(y + 4)(-2) = (x - 4) \cdot 7$ $-2y - 8 = 7x - 28$ $-7x - 2y + 20 = 0$	<p>Wyznaczamy równanie prostej przechodzącej przez punkty $(4,-4); (2,3)$. Wykorzystujemy do tego wzór</p> $(y - y_A)(x_B - x_A) = (x - x_A)(y_B - y_A)$ <p>i wykonujemy podstawienie $x_A = 4, y_A = -4, x_B = 2, y_B = 3$ Równanie zapisujemy w postaci ogólnej</p>
$-7x - 2y + 20 = 0$ $-7 \cdot p - 2 \cdot 0 + 20 = 0$ $-7p + 20 = 0$ $-7p = -20 / : (-7)$ $p = 2\frac{6}{7}$	<p>Punkt $(p,0)$ należy do prostej $-7x - 2y + 20 = 0$, zatem jego współrzędne spełniają to równanie. Wykonujemy podstawienie $x = p, y = 0$. Rozwiązując równanie obliczymy szukane p</p>

Przykład 10.1.5. Wyznacz współrzędne punktu przecięcia się prostych o równaniach:
 $2x - y = 0$ i $2x - 3y - 12 = 0$

Rozwiązanie	Komentarz
$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2x - 3y = 12 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - y = 0 / \cdot (-3) \\ 2x - 3y = 12 \end{cases}$ $\begin{cases} -6x + 3y = 0 \\ 2x - 3y = 12 \end{cases} +$	<p>Aby znaleźć punkt przecięcia się prostych musimy rozwiązać układ równań.</p> <p>Układ równań rozwiązujemy metodą przeciwnych współczynników.</p>
$-6x + 3y + 2x - 3y = 12$ $-4x = 12 / : (-4)$ $x = -3$ $2x - y = 0$	

$2 \cdot (-3) - y = 0$ $-6 - y = 0$ $y = -6$ <p>Odp. Punkt przecięcia się prostych ma współrzędne $(-3, -6)$</p>	<p>Rozwiązanie układu równań są współrzędnymi punktu przecięcia się prostych.</p>
---	---

ĆWICZENIA

Ćwiczenie 10.1.1. (2pkt.) Dla jakich wartości a prosta $y = -x + 2a - 3$ przecina oś OY w punkcie $(0, -6)$.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Ułożenie równanie z niewiadomą a	1
2	Podanie wartości a	1

Ćwiczenie 10.1.2. (3pkt.) Napisz równanie prostej l nachylonej do osi OX pod kątem $\alpha = 45^\circ$ i przechodzącej przez punkt $P = (2, -1)$.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Wyznaczenie wartości współczynnika kierunkowego a	1
2	Wyznaczenie wartości współczynnika b	1
3	Podanie równania prostej l	1

Ćwiczenie 10.1.3. (2pkt.) Napisz równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty $A = (2, -3); B = (0, 1)$.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Zapisanie równania z niewiadomymi x, y lub zapisanie układu nierówności z niewiadomymi a, b .	1
2	Podanie równanie prostej przechodzącej przez punkty A, B .	1

Ćwiczenie 10.1.4. (2pkt.) Sprawdź, czy punkty $A = (-1,2)$; $B = (2,-2)$, $C = (3,-3)$ są współliniowe.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie równanie prostej przechodzącej przez punkty A, B .	1
2	Sprawdzenie, czy punkt należy do wyznaczonej prostej i podanie odpowiedzi.	1